Université Grenoble Alpes **Année 2022-2023**
Agrégation interne de Mathématiques

Géométrie différentielle - Courbes en dimension 2 et 3

Exercice 1 Traiter les points indiqués en marron dans le cours (au moins quelques points ...).

Exercice 2 Dans un repère orthonormal direct, on définit la droite D par l'équation $x + y + 1 = 0$ et, pour tout réel λ, le cercle $\mathcal{C}_\lambda$ d'équation $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2y + 2 = 0$. Décrire le cercle $\mathcal{C}_\lambda$ en fonction du paramètre λ puis étudier l'intersection de D et de $\mathcal{C}_\lambda$.

Exercice 3 Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation cartésienne $x^2+y^2-6x+2y+5 = 0$, et $A : (4, -4)$. On peut mener par le point A deux tangents au cercle $\mathcal{C}$. Calculer la distance entre les points d'intersection de ces tangentes avec $\mathcal{C}$.

Exercice 4 Etudier et tracer la courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}$ par $\gamma(t) = \left(t^2, \dfrac{(1+t)^2}{1+t^2}\right)$.

Exercice 5 Soit Γ la courbe d'équation paramétrique $x = 3t^2,\ y = 2t^3,\ t \in \mathbb{R}$.

1. étudier et tracer Γ.
2. Déterminer les droites à la fois tangentes et normales à Γ.

Exercice 6 Soit a et b 2 réels non nuls. Soit $\Gamma_{a,b}$ le support de la courbe de représentation paramétrique $\gamma_{a,b}(t) = \left(2t + \frac{a^3}{t^3}, t^2 + \frac{b^3}{t}\right)$, définie sur $]0, +\infty[$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\Gamma_{a,b}$ possède un et un seul point de rebroussement.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\Gamma_{a,b}$ possède au moins un point double.

Exercice 7

1. Soit $p > 0$, $e \geq 0$ et soit la courbe définie par l'équation polaire $r(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$. Décrire la courbe suivant les valeurs de e (on pourra passer aux coordonnées cartésiennes et trouver une équation définissant la courbe).
2. Pour $c > 0$ et $\alpha \in [0, \pi[$, on considère la courbe définie par l'équation polaire $r(\theta) = \dfrac{c}{\sin(\theta - \alpha)}$. Décrire la courbe et donner un sens géométrique aux paramètres c et α.
3. Pour $d > 0$ et $\alpha \in [0, 2\pi]$, on considère la courbe définie par l'équation polaire $r(\theta) = d\cos(\theta - \alpha)$. Déterminer la courbe et donner un sens géométrique au paramètre d.

Exercice 8 Etudier et tracer les courbes d'équation polaire :

1. $r(\theta) = \cos(\theta)/\sin(\theta)$,
2. $r = 1 - 2\sin(\theta)$.

Exercice 9 Soit $\gamma : t \in I \mapsto (x(t), 0, z(t))$ une courbe tracée dans un plan vertical. Paramétrer la surface de révolution engendrée par la rotation de cette courbe autour de l'axe Oz.

Exercice 10 Soit $\gamma : t \in]0,+\infty[\mapsto \left(t, t+\frac{1}{t}, t+\frac{1}{2t^2}\right)$. Donner une équation du plan osculateur au support de γ en $\gamma(1)$.

Exercice 11 Soit Γ l'astroïde d'équation paramétrique $x(t) = \cos^3 t,\ y(t) = \sin^3 t$, $t \in \mathbb{R}$. étudier et tracer Γ.

Exercice 12

La cycloïde est la courbe parcourue par un point sur le bord d'une roue qui roule sans glissement sur un sol plat.

On considèrera ici la cycloïde donnée par :

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ t & \mapsto \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \end{cases}.$$

1. Montrer que la courbe γ est invariante par la translation $z \mapsto z + (2\pi, 0)$.
2. Montrer que la courbe γ admet une symétrie d'axe (Oy).
3. Étudier les variations des fonctions x et y sur $[-\pi, \pi]$.
4. Faire un développement limité à l'ordre 3 des fonctions x et y au voisinage de $t = \pi$.
5. En déduire l'allure de la courbe γ au voisinage du point $\gamma(\pi)$.
6. Montrer que la vitesse instantanée de la courbe à l'instant t vaut $\|\gamma'(t)\| = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)$. Calculer la longueur totale de la courbe entre les instants $-\pi$ et π.
7. Dessiner la courbe γ.

Exercice 13 Soit Γ la courbe d'équation paramétrique : $x(t) = 3-2\cos(t)-\cos(2t)$, $y(t) = 2\sin(t)-\sin(2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Réduire le domaine d'étude (en précisant les transformations).
   On note Γ_1 la partie de la courbe correspondant à $t \in [0.\pi]$.
2. Montrer que la courbe Γ_1 présente deux points singuliers, pour $t = 0$ et $t = t_0$ que l'on déterminera.
   On note I le point de paramètre t_0.
   Donner l'allure de la courbe au voisinage des points O et I (équation des tangentes, position relative de la courbe et des tangentes).
   On note T la tangente à Γ au point I.
3. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les cercles de centre $\Omega : (3,0)$ et de rayons respectifs $R_1 = 3$ et $R_2 = 1$.
   3.a. Vérifier que la droite T passe par Ω. Déterminer $\Gamma \cap \mathcal{C}_1$.
   3.b. Soit J le point de Γ de paramètre $\pi/3$. Montrer que γ est tangente à $\mathcal{C}_2$ au point J.
4. Tracer les courbes Γ , $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et T.
5. Montrer que la courbe Γ est invariante par la rotation de centre Ω et d'angle $2\pi/3$. (On pourra utiliser des affixes complexes.)
6. Calculer la longueur de Γ.
7. Calculer le repère de Frénet en chaque point, et le centre de courbure.

Exercice 14 Déterminer la longueur de la courbe, le repère de Frénet en chaque point, et le centre de courbure de la courbe d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \\ y(t) = \dfrac{2t}{(1+t^2)^2} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 15 Calculer la longueur et la courbure de chacune des courbes polaires suivantes (on pourra évidemment donner une allure de chacune de ces courbes) :

1. $r = 3\theta,\ \theta \in \mathbb{R}$,
2. $r = \cos^3(\theta/3),\ \theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 16 On considère l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ d'équation $xy = 1$ et un point M de l'hyperbole. La normale à $\mathcal{H}$ au point M recoupe $\mathcal{H}$ en un second point N. Montrer, en notant I le centre de courbure au point M, que : $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{MI}$.

Exercice 17 La courbe développée d'un arc paramétré est la courbe obtenue en prenant le lieu de ses centres de courbure.
I. On considère la cardioïde d'équation polaire $\rho = 1 + \cos(\theta)$.

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le rayon de courbure vaut : $R = \dfrac{4}{3}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.
2. Montrer que le centre de courbure I a pour coordonnées dans le repère $(O, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$:
$$I : \left(1 + \ \cos(\theta) - \frac{2}{3}(1+\cos(\theta)), -\frac{2}{3}\sin(\theta)\right).$$
3. Montrer que si $A : (2/3, 0)$, les coordonnées de I dans le repère $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont :
$$I : \frac{1}{3}\left((1-\cos(\theta))\cos(\theta), (1-\cos(\theta))\sin(\theta)\right)$$
et en déduire que la développée de la cardioïde est une cardioïde.

II. Montrer de même que la développée de l'ellipse d'équation cartésienne $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ est une astroïde (on pourra montrer que $I : \left(-3\cos^3(t), \frac{3}{2}\sin^3(t)\right)$).

Exercice 18 Soit l'hélice paramétrée par la longueur d'arc :
$$\gamma(s) = \left(a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$
où a et b sont des paramètres réels.

1. Vérifier que les droites tangentes à cette hélice font toutes un angle constant avec l'axe Oz du cylindre.
2. Calculer la courbure et la torsion de γ (elles devraient être constantes).

Polynômes de Bernstein et courbes de Bézier

Les exercices qui suivent sont tirés de résultats d'un cours polycopié de Daniel Perrin et permettent de voir les principales propriétés et constructions des courbes de Bézier (https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ perrin/CAPES/geometrie/BezierDP.pdf).

Exercice 19 Quelques propriétés des polynômes de Bernstein
Soit $n \geq 1$. On considère les polynômes de Bernstein d'ordre n, $B_{0,n},\ dots, B_{n,n}$ définis par :
$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i}.$$

1. Vérifier : $\forall 0 \leq i \leq n,\ \forall t \in [0,1],\ B_{n,i} \geq 0$ et $\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(t) = 1$.

2. Vérifier ques les polynômes $B_{0,n}, \ldots, B_{n,n}$ forment une base de l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
3. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, alors la suite de polynômes $(B_n(f))_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ B_n(f) := \sum_{i=0}^{n} f(i/n) B_{i,n}$$

converge uniformément sur $[0,1]$.
4. Calculer le maximum de la fonction $B_{i,n}$, pour $0 \leq i \leq n$.
5. Montrer la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 1,\ \forall 0 < i < n,\ \forall t \in \mathbb{R},\ B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n_1}(t).$$

Exercice 20 Soient $A_0,\ A_1, \ldots, A_n$ des points distincts du plan. La courbe de Bézier d'ordre n associée ‘a ces points est la courbe paramétrée C_n définie pour tout $t \in [0,1]$ par :

$$M(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) A_i$$

où $B_{0,n}, \ldots, B_{n,n}$ sont les polynômes de Bernstein d'ordre n. On la note $\mathcal{B}(A_0, A_1, \ldots, A_n)$. Si A_i est le point de coordonnées (x_i, y_i), le point M(t) a donc pour coordonnées $(x(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)x_i, y(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)y_i)$.

On a : (voir Théorème 2.5 de [Perrin]) :

1. La courbe C_n est une courbe de classe $\mathcal{C}^1$.
2. $M(0) = A_0$ et $M(1) = A_n$.
3. La droite (A_0A_1) (resp. $A_{n-1}A_n$)) est tangente à C_n en A_0 (resp. A_n).
4. La courbe C_n est dans l'enveloppe convexe des points $A_0, \ldots, A_n$.
5. Les courbes de Bézier d'ordre n (en faisant varier les points $A_0, \ldots, A_n$) sont toutes les courbes définies par des représentations paramétriques polynomiales de degré n (utiliser la question 2 de l'exercice précédent).

Exercice 21 Montrer les propriétés suivantes des courbes de Bézier :

1. Une courbe de Bézier C_n ne peut pas être un arc de cercle non réduit à un point.
2. Pour $n = 1$, la courbe C_1 est égale au segment de droite $[A_0A_1]$.
3. **Courbes de Bézier d'ordre 2.** On considère 3 points A, B, C non alignés. La courbe $C_2 = \mathcal{B}(A, B, C)$ est une parabole. (Indication : écrire les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de $M(t) = (1-t)^2A + 2t(1-t)B + t^2C$, puis montrer que $y = aX^2 + bX + c$ où X dépend de façon affine de x et y.)
4. **Courbes de Bézier d'ordre 3.** Soit $A : (0,0)$, $B : (1,0)$, $C : (1,1)$ et $D(0,1)$. Donner les équations paramétriques des courbes $\mathcal{B}(A, B, C, D)$, $\mathcal{B}(A, B, D, C)$ et $\mathcal{B}(A, C, B, D)$, les étudier (symétries, points singuliers, tangentes) et les tracer.

Exercice 22 Construction récursive des courbes de Bézier

On considère $(n+1)$ points distincts $A_0,\ A_1, \ldots, A_n$ du plan. Pour $t \in [0,1]$, on note $M(t)$ (resp. $P(t)$, resp. $Q(t)$) le point de la courbe de Bézier $\mathcal{B}(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ (resp. $B(A_0, A1, \ldots, A_{n-1})$, resp. $B(A_1, \ldots, A_n)$). Alors, pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$M(t) = (1-t)P(t) + tQ(t).$$

Exercice 23 Construction par concaténation de courbes de Bézier d'ordre 3 (algorithme de Casteljau)

On considère 4 points distincts A_0, A_1, A_2, A_3 du plan. On considère la courbe $B(A_0, A_1, A_2, A_3)$ paramétrée par : $M(t) = (1-t)^3A_0 + 3(1-t)^2tA_1 + 3(1-t)t^2A_2 + t^3A_3$.

On note $mil(A; B)$ le milieu des points A, B. On construit le point $M = mil(A_1; A_2)$, puis on définit les points $B_0 = A_0$, $B_1 = mil(A_0; A_1)$, $B_2 = mil(B_1; M)$ et les points : $C_3 = A_3$, $C_2 = mil(A_2; A_3)$, $C_1 = mil(M; C_2)$ (faire un dessin). On a alors (voir Théorème 5.2 de [Perrin]) :

1. Le point $B_3 = C_0$, milieu du segment $[B_2C_1]$, est égal à $M(1/2)$.
2. La courbe $\mathcal{B}(A_0, A_1, A_2, A_3)$ est obtenue en concaténant les courbes $\mathcal{B}(B_0, B_1, B_2, B_3)$ et $\mathcal{B}(C_0, C_1, C_2, C_3)$.
3. La tangente à la courbe $\mathcal{B}(A_0, A_1, A_2, A_3)$ au point $M(1/2)$ est la droite (B_2C_1) (on pourra s'intéresser aux tangentes en ce point aux courbes $\mathcal{B}(B_0, B_1, B_2, B_3)$ et $\mathcal{B}(C_0, C_1, C_2, C_3)$ ou montrer l'égalité $M'(1/2) = 3\overrightarrow{B_2C_1}$).